

2 Skupovi brojeva

2.1 Skup prirodnih brojeva

Skup N prirodnih brojeva čine brojevi $1, 2, 3, \dots$. Nad skupom prirodnih brojeva definisane su operacije sabiranja $(+)$ i množenja (\cdot) , čiji je rezultat takođe prirodan broj. Za dva prirodna broja $m, n \in N$ važi

$$m + n \in N \quad m \cdot n \in N$$

Ovo znači da je skup N zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja. Za tri broja $m, n, k \in N$ važi

- $(m + n) + k = m + (n + k)$ - asocijativnost sabiranja
- $m + n = n + m$ - komutativnost sabiranja
- $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$ - asocijativnost množenja
- $m \cdot n = n \cdot m$ - komutativnost množenja
- $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ - postoji neutralni element za množenje
- $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ - distributivnost množenja u odnosu na sabiranje

Skup prirodnih brojeva može se uvesti i aksiomatski, na osnovu Peanovih aksioma, a polazeći od pojmova *broj 1* i *sledbenik n' broja n* :

1. Broj $1 \in N$.
2. Za svako $n \in N$ postoji sledbenik $n' \in N$ koji sledi za njim.
3. Broj jedan nije sledbenik nijednog prirodnog broja.
4. Za svako $m, n \in N$ važi $m = n \Leftrightarrow m' = n'$.
5. Ako je $N_1 \subset N$ i ako N_1 zadovoljava aksiome 1 i 2, onda je $N_1 = N$ (aksioma indukcije).

2.1.1 Princip matematičke indukcije

Neka je I (otvoreni) iskaz koji zavisi od prirodnog broja n . Ako je ispunjeno:

1. iskaz je tačan za prirodan broj 1,
2. iz pretpostavke da je iskaz tačan za neki prirodan broj k , sledi da je iskaz tačan i za prirodan broj $k + 1$,

tada je iskaz I tačan za svaki prirodan broj.

Princip matematičke indukcije sledi iz aksiome indukcije. Ako je N_1 skup svih prirodnih brojeva za koje važi iskaz I , tada prema uslovu 1 sledi $1 \in N_1$, a prema uslovu 2 sledi $k \in N_1 \Rightarrow k + 1 \in N_1$ što znači da N_1 zadovoljava Peanove aksiome 1 i 2, pa je $N_1 = N$.

Primer 18 *Dokazati pomoću principa matematičke indukcije da za svako $n \in N$ važi*

$$\begin{aligned} a) & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ b) & n! \geq 2^{n-1} \end{aligned}$$

a)

$$n = 1$$

$$1^3 = \frac{1}{4}(1+1)^2$$

$$n = k$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + k^3 = \frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

$$n = k + 1$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4(k+1)) = \frac{1}{4}(k+1)^2(k^2 + 4k + 4) \\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2 = \frac{1}{4}(k+1)^2((k+1)+1)^2 \end{aligned}$$

b)

$$n = 1$$

$$1! \geq 2^0 = 1$$

$$n = k$$

$$k! \geq 2^{k-1}$$

$$n = k + 1$$

$$\begin{aligned} (k+1)! &= (k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1} \\ &\geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{(k+1)-1} \end{aligned}$$

2.2 Skup celih brojeva

Skup D celih brojeva čine brojevi $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$. Između skupova N i D važi relacija inkluzije $N \subset D$. Skup D je, kao i skup N , zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja, koje zadovoljavaju sve osobine kao i u skupu N . U skupu celih brojeva sabiranje zadovoljava i sledeće dodatne osobine:

- $k + 0 = 0 + k = k$ - postoji neutralni element za sabiranje
- $\forall k \in D \exists k^*$, takvo da je $k + k^* = 0$ - za svaki element k skupa celih brojeva postoji njemu inverzni element $k^* = -k$ u odnosu na sabiranje.

2.3 Skup racionalnih brojeva

Skup racionalnih brojeva čine razlomci $\frac{p}{q}$, pri čemu važi $p, q \in D$, p i q su uzajamno prosti (nemaju ni jedan zajednički faktor različit od 1) i $q \neq 0$.

Između skupova N, D i Q važi relacija inkluzije $N \subset D \subset Q$. Skup Q je zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja, koje zadovoljavaju sve osobine kao i u skupu D . U skupu racionalnih brojeva množenje zadovoljava i sledeću dodatnu osobinu:

- $\forall (x \in Q \wedge x \neq 0) \exists x^*$ takvo da je $x \cdot x^* = 1$ - za svaki element x skupa racionalnih brojeva različit od 0 postoji njemu inverzni element $x^* = \frac{1}{x}$ u odnosu na množenje.

2.4 Skup realnih brojeva

Skup realnih brojeva R predstavlja uniju skupa racionalnih brojeva i *iracionalnih brojeva* (I), koji mogu biti *algebarski* i *transcendentni*. Dakle, $R = Q \cup I$, pri čemu je $Q \cap I = \emptyset$.

Iracionalni brojevi su *algebarski* ako se mogu dobiti kao koren (nula) polinoma čiji su koeficijenti *racionalni*, odnosno kao rešenje algebarske jednačine:

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad a_i \in Q$$

Primer 19 *Kako je:*

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

sledi da je $x = \sqrt{2}$ *algebarski iracionalan broj*.

Pokažimo da je $\sqrt{2}$ zaista iracionalan broj. Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, što znači da ga je moguće izraziti kao količnik dva

uzajamno prosta cela broja p i q : $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{2}q \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Odavde je očigledno da je p^2 deljivo sa 2, odnosno da je p^2 paran broj. No, ako je p^2 paran broj onda je i p paran broj, odnosno broj deljiv sa 2. Sledi da je onda p^2 deljivo sa 4. Kako je $p^2 = 2q^2$, sledi da je i $2q^2$ deljivo sa 4, odnosno da je q^2 deljivo sa 2. Stoga i q mora biti deljivo sa 2. Prema tome i p i q su deljivi sa 2 i stoga nisu uzajamno prosti, što je u kontradikciji sa polaznim pretpostavkama. Iz ovoga sledi da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, jer ga nije moguće izraziti kao količnik dva uzajamno prosta cela broja p i q .

Iracionalni brojevi su *transcedentni* ako nisu koreni polinoma čiji su koeficijenti racionalni, kao što je npr. broj π koji predstavlja odnos između obima kruga i njegovog prečnika.

$$\pi = \frac{O}{2r}$$

Skup realnih brojeva, u kome važi relacija poretka ($<$) zadovoljava *Dedekindovu aksiomu neprekidnosti*:

Ako je $A \subset R$ i $B \subset R$ i

1. $A \cup B = R$
2. $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$
3. $(\forall x, y)(x \in A \wedge y \in B \Rightarrow x < y)$

onda postoji ili $\max A$ ili $\min B$.

Kao posledica ove aksiome svaki podskup skupa R koji je ograničen odozgo ima sup a svaki podskup koji je ograničen odozdo ima inf.

Brojna osa (prava) je prava sa fiksiranim tačkama O i L , takvim da tački O odgovara realni broj 0, a tački L realni broj 1. Na ovaj način uspostavlja se obostrano jednoznačno preslikavanje između skupa realnih brojeva i skupa tačka na brojnoj osi. Duž \overline{OL} je jedinica mere.

Otvoreni interval (a, b) čini skup svih realnih brojeva x takvih da je $a < x < b$.

Poluotvoreni interval $[a, b)$ odnosno $(a, b]$ čini skup svih realnih brojeva x takvih da je

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

Zatvoreni interval $[a, b]$ čini skup svih realnih brojeva x takvih da je $a \leq x \leq b$.

Apsolutna vrednost realnog broja a se označava sa $|a|$, a definiše sa

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Važi da je:

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)
- $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

2.5 Skup kompleksnih brojeva

Jednačina $x^2 = -1$ nema rešenja u skupu realnih brojeva. Međutim, ako se uvede *imaginarna jedinica* i takva da je $i^2 = -1$ onda se skup realnih brojeva može proširiti na skup *kompleksnih brojeva* čiji su elementi $z = x + iy$, gde su x i y realni brojevi, odnosno:

$$C = \{x + iy | x, y \in R\}$$

Realni deo kompleksnog broja $z = x + iy$ je $x = \operatorname{Re} z$, a imaginarni deo je $y = \operatorname{Im} z$. Za $y = 0$, $z = x$ predstavlja realan broj, a za $x = 0$, $z = iy$ je *čisto* imaginaran broj. Ako je $z_1 = x_1 + iy_1$, a $z_2 = x_2 + iy_2$, onda je

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Nad skupom kompleksnih brojeva definisane su sledeće operacije:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Za svaki kompleksan broj $z = x + iy$ postoji njemu *konjugovano kompleksan broj* $\bar{z} = x - iy$. Važi

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

Kompleksni brojevi se mogu predstaviti u *kompleksnoj (Gausovoj) ravni* gde je x osa realna, a y osa imaginarna. Između skupa kompleksnih brojeva i

skupa tačaka u Gausovoj ravni postoji obostrano jednoznačno preslikavanje. Svaka tačka u ravni jednoznačno je određena radijus vektorom koji spaja tu tačku sa koordinatnim početkom: dužinom ρ vektora i uglom ϕ koji vektor zaklapa sa x osom, pri čemu se obično uzima vrednost ugla u intervalu $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Tako se i kompleksan broj može predstaviti preko ρ i ϕ u *trigonometrijskom obliku*:

$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

jer je $x = \rho \cos \phi$ i $y = \rho \sin \phi$. ρ je moduo (apsolutna vrednost) broja z i jednak je

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

ϕ je *argument* kompleksnog broja i jednak je

$$\phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = 0, y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

2.5.1 Operacije sa kompleksnim brojevima u trigonometrijskom obliku

Za kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku operacije množenja i deljenja date su sa:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku dato je formulama:

$$z^n = \rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Formule za z^n i $\sqrt[n]{z}$ nazivaju se *prvom i drugom Moavrovom formulom*. Iz druge Moavrove formule vidi se da je broj različitih n -tih korena svakog kompleksnog broja tačno n .

Dokaz 1 Dokažimo najpre formulu za proizvod dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku $z_1 = \rho_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$ i $z_2 = \rho_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot \rho_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)) \end{aligned}$$

Dokaz 2 Dokažimo sada formulu za količnik dva kompleksna broja u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)}{\rho_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 - i \sin \phi_2)}{\rho_2(\cos^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_2)} = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2)) = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)) \end{aligned}$$

Dokaz 3 Prvu Moavrovu formulu

$$z^n = \rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

dokazaćemo pomoću matematičke indukcije. Formula očigledno važi za $n = 1$:

$$n = 1: \quad z^1 = \rho^1 (\cos 1 \cdot \phi + i \sin 1 \cdot \phi)$$

Pretpostavićemo sada da važi za $n = k$:

$$n = k: \quad z^k = \rho^k (\cos k \cdot \phi + i \sin k \cdot \phi)$$

U tom slučaju je za:

$$\begin{aligned} n = k + 1: \quad z^{k+1} &= z \cdot z^k = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) \rho^k (\cos k \cdot \phi + i \sin k \cdot \phi) \\ &= \rho^{k+1} (\cos \phi \cos k\phi + i \sin \phi \cos k\phi + i \cos \phi \sin k\phi + i^2 \sin \phi \sin k\phi) \\ &= \rho^{k+1} [(\cos \phi \cos k\phi - \sin \phi \sin k\phi) + i(\sin \phi \cos k\phi + \cos \phi \sin k\phi)] \\ &= \rho^{k+1} (\cos(\phi + k\phi) + i \sin(\phi + k\phi)) \\ &= \rho^{k+1} (\cos(k+1)\phi + i \sin(k+1)\phi) \end{aligned}$$

Dokaz 4 Dokaz druge Moavrove formule

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\phi + 2n\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2n\pi}{n} \right)$$

je najslabiji. Pretpostavimo da je: $\sqrt[n]{z} = \xi$ gde je $\xi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, odnosno:

$$\sqrt[n]{z} = \xi \Leftrightarrow \xi^n = z$$

Sledi, dalje:

$$\sqrt[n]{z} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\rho(\cos \phi + i \sin \phi) = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\rho = r^n \wedge \cos \phi = \cos n\theta \wedge \sin \phi = \sin n\theta$$

Odatve je sada:

$$r = \sqrt[n]{\rho} \wedge \cos n\theta - \cos \phi = 0 \wedge \sin n\theta - \sin \phi = 0$$

Primenom formula za razliku kosinusa odnosno razliku sinusa iz $\cos n\theta - \cos \phi = 0 \wedge \sin n\theta - \sin \phi = 0$ se potom dobija:

$$-2 \sin \frac{n\theta - \phi}{2} \sin \frac{n\theta + \phi}{2} = 0 \wedge 2 \sin \frac{n\theta - \phi}{2} \cos \frac{n\theta + \phi}{2} = 0$$

Pošto $\sin \frac{n\theta + \phi}{2}$ i $\cos \frac{n\theta + \phi}{2}$ ne mogu istovremeno biti jednaki nuli, mora da važi

$$\sin \frac{n\theta - \phi}{2} = 0$$

$$\frac{n\theta - \phi}{2} = k\pi$$

$$n\theta - \phi = 2k\pi$$

$$n\theta = \phi + 2k\pi$$

$$\theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$$

(a) Pokažimo sada da se za svako $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dobija različiti koren. Ako su $0 \leq k_1 \leq n-1$ i $0 \leq k_2 \leq n-1$, onda je za $k_1 \neq k_2$

$$z_1 = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\phi + 2k_1\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k_1\pi}{n} \right) \neq z_2 = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\phi + 2k_2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k_2\pi}{n} \right)$$

Ako pretpostavimo suprotno $k_1 \neq k_2$ i $z_1 = z_2$, sledi

$$\sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\phi + 2k_1\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k_1\pi}{n}) = \sqrt[n]{\rho}(\cos \frac{\phi + 2k_2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k_2\pi}{n})$$

pa je

$$\cos \frac{\phi + 2k_1\pi}{n} = \cos \frac{\phi + 2k_2\pi}{n} \wedge \sin \frac{\phi + 2k_1\pi}{n} = \sin \frac{\phi + 2k_2\pi}{n}$$

odnosno

$$\frac{\phi + 2k_1\pi}{n} - \frac{\phi + 2k_2\pi}{n} = 2k\pi$$

$$\phi + 2k_1\pi - \phi - 2k_2\pi = 2nk\pi$$

$$k_1 - k_2 = nk$$

$$k_1 = nk + k_2$$

što je u suprotnosti sa polaznim pretpostavkama $k_1 \neq k_2$, $0 \leq k_1 \leq n-1$ i $0 \leq k_2 \leq n-1$ jer je ili $k = 0$ što povlači $k_1 = k_2$ ili je $k \neq 0$ i $k_1 \geq n \vee k_1 < 0$.

(b) Konačno, pokažimo da $k < 0$ i $k \geq n$ ne daje nove korene. Naime, za svako $k < 0$ i $k \geq n$ može se naći $0 \leq k_1 \leq n-1$ takvo da je $k = k_1 + n \cdot k^*$. Odavde je:

$$\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \cos \frac{\phi + 2(k_1 + nk^*)\pi}{n} = \cos(\frac{\phi + 2k_1\pi}{n} + 2k^*\pi) = \cos \frac{\phi + 2k_1\pi}{n}$$

$$\sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} = \sin \frac{\phi + 2(k_1 + nk^*)\pi}{n} = \sin \frac{\phi + 2k_1\pi}{n}$$

pa sledi da su koreni za k i k_1 isti.

Svi koreni kompleksnog broja z imaju isti radijus vektor što znači da se u Gausovoj ravni svi nalaze na krugu sa centrom u koordinatnom početku. Argumenti im se razlikuju za isti ugao: $\frac{2\pi}{n}$, tako da tačke u kompleksnoj ravni koje predstavljaju korene broja z čine temena pravilnog mnogougla.

Primer 20 Izračunajmo $\sqrt[4]{1}$.

$$1 = (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt[4]{1} = 1(\cos \frac{0 + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{4}) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
k = 0 : \quad z_1 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1 \\
k = 1 : \quad z_1 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \\
k = 2 : \quad z_1 &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \\
k = 3 : \quad z_1 &= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i
\end{aligned}$$

Primer 21

$$1. (3 + 2i)(i + 3) + (2 - i)(i + 1) = 3i + 2i^2 + 9 + 6i + 2i - i^2 + 2 - i = i^2 + 10i + 11 = 10 + 10i$$

$$2. \frac{i+1}{i-1} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

3. Naći moduo i argument sledećih kompleksnih brojeva:

$$(a) z_1 = -i \quad \rho_1 = 1 \quad \phi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$(b) z_2 = 3i \quad \rho_2 = 3 \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$(c) z_3 = 5 \quad \rho_3 = 5 \quad \phi_3 = 0$$

$$(d) z_4 = -5 \quad \rho_4 = 5 \quad \phi_4 = \pi$$

$$(e) z_5 = 1 + i \quad \rho_5 = \sqrt{2} \quad \phi_5 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_5 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$(f) z_6 = 1 - i \quad \rho_6 = \sqrt{2} \quad \phi_6 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$z_6 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$(g) z_7 = -1 + i \quad \rho_7 = \sqrt{2} \quad \phi_7 = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_7 = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$(h) z_8 = -1 - i \quad \rho_8 = \sqrt{2} \quad \phi_8 = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$z_8 = \sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4})) = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$4. (1 + i)^{10} = [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos \frac{10\pi}{4} + i \sin \frac{10\pi}{4}) = 2^5(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = 32(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = 32i$$

$$5. \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3})$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{-5\pi}{12} + i \sin \frac{-5\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12})$$